

Chapitre 14

Mécanique classique et mécanique quantique



14.1 Fondements de la mécanique quantique

- 14.1.1 Mécanique classique et mécanique quantique
- 14.1.2 Observables physiques
- 14.1.3 Quantité de mouvement
- 14.1.4 Hamiltonien
- 14.1.5 Equation de Schrödinger

14.2 Chimie quantique

- 14.2.1 Atome d'hydrogène
- 14.2.2 Orbitales de l'atome d'hydrogène
- 14.2.3 Spin

14.3 Information quantique

- 14.3.1 Processus de mesure
- 14.3.2 Qubit
- 14.3.3 Ordinateur quantique
- 14.3.4 Intrication quantique

14.1 Fondements de la mécanique quantique

14.1.1 Mécanique classique et mécanique quantique

14.1.2 Observables physiques

14.1.3 Quantité de mouvement

14.1.4 Hamiltonien

14.1.5 Equation de Schrödinger

Mécanique classique

① Observables physiques

- Fonctions
- Compatibles

② Description du réel

③ Lois déterministes

④ Processus de mesure déterministes

⑤ Théorie locale

Mécanique quantique

① Observables physiques

- Opérateurs
- Incompatibles

② Description du possible

③ Lois déterministes

④ Processus de mesure probabilistes

⑤ Théorie non-locale

- **Observables physiques** : décrites par des opérateurs.

① Dérivée spatiale (gradient) : $\nabla = \frac{d}{d\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

② Dérivée temporelle : $\frac{\partial}{\partial t}$

- **Espace de Hilbert** : les opérateurs $\hat{A}$ agissent sur des fonctions $\psi(\mathbf{r}, t)$ qui sont des vecteurs d'un espace vectoriel $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ de dimension infinie.

- **Fonction d'onde** : photon (quasiparticule de lumière)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \in \mathbb{C}$$

① Gradient : $\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$

② Dérivée temporelle : $\frac{\partial \psi}{\partial t}$

- **Equation aux valeurs propres** : l'opérateur $\hat{A}$ satisfait une équation aux valeurs propres (fonctions) A

(14.1)

- **Quantité de mouvement** : un mouvement est caractérisé par un déplacement dans l'espace.

- ① Opérateur variation spatiale : ∇ (gradient)
- ② Dimension : $\hbar$ (constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi$)
- ③ Valeur propre réelle : $-i$ (nombre imaginaire)

- **Opérateur quantité de mouvement :**

(14.2)

- **Equation aux valeurs propres :**

(14.3)

$$-i \hbar \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = -i \hbar \nabla \left(\psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \hbar \mathbf{k} \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \hbar \mathbf{k} \psi(\mathbf{r}, t)$$

- **Valeurs propres de l'opérateur** : quantité de mouvement photon

(14.4)

- **Energie** : un mouvement est caractérisé par une variation dans le temps.

- ① Opérateur variation temporelle : $\frac{\partial}{\partial t}$ (dérivée temporelle)
- ② Dimension : $\hbar$ (constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi$)
- ③ Valeur propre réelle : i (nombre imaginaire)

- **Opérateur Hamiltonien :**

(14.5)

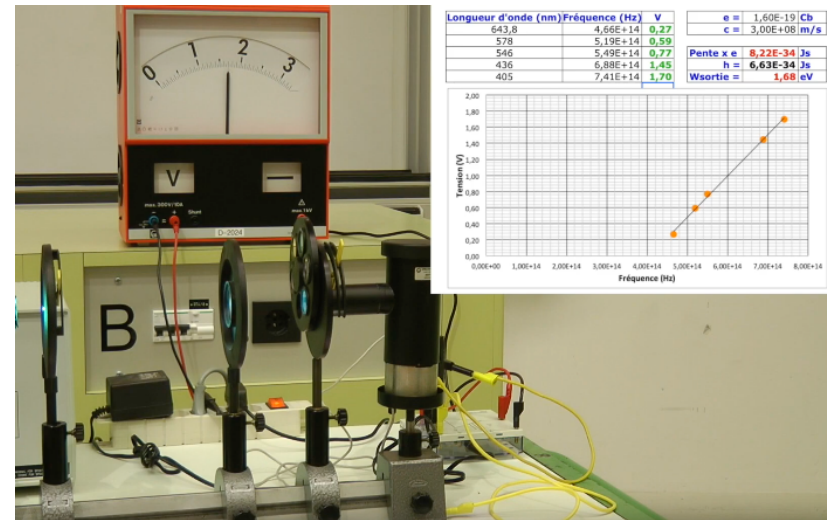
- **Equation aux valeurs propres :**

(14.6)

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right) = \hbar \omega \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \hbar \omega \psi(\mathbf{r}, t)$$

- **Valeurs propres de l'opérateur : énergie photon**

(14.7)



- **Effet photoélectrique** : en éclairant une plaque métallique avec des photons de fréquence ν , on peut arracher des électrons de certaines orbitales atomiques et leur donner une énergie cinétique,

$$T(\nu) = h\nu - W$$

où W est le travail à fournir à l'électron de charge électrique e pour le libérer de la plaque métallique (Einstein : Prix Nobel 1921). Les électrons se déposent alors sur une plaque métallique voisine et génèrent à l'équilibre une tension électrique $V(\nu)$,

$$T(\nu) = eV(\nu) = h\nu - W \quad \text{ainsi} \quad V(\nu) = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}$$



- **Effet photoélectrique** : en éclairant une plaque métallique avec des photons de fréquence ν , on peut arracher des électrons de certaines orbitales atomiques et les faire circuler dans un circuit électrique en générant un courant électrique I .
- **Applications** : les panneaux solaires et les cellules photoélectriques fonctionnent grâce à l'effet photovoltaïque.

- **Energie** : mécanique classique

(14.8)

- **Hamiltonien** : mécanique quantique

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (14.9)$$

- **Opérateurs** : développement mathématique

$$\hat{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m} (-i\hbar)^2 \nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (14.10)$$

- **Equation opératorielle** :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\hat{\mathbf{r}}) \quad (14.11)$$

- **Equation de Schrödinger** : made in Switzerland (1925)

(14.12)

Erwin Schrödinger (1887 - 1961)

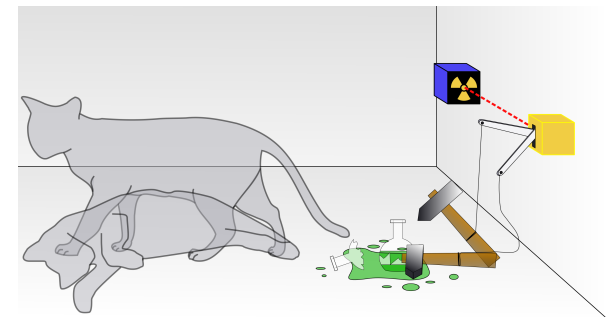


Je suis stupéfait de découvrir que notre vision scientifique du monde est vraiment déficiente. Elle nous donne beaucoup d'informations précises, ordonne magnifiquement bien nos expériences du réel, mais reste terriblement muette et tristement étrangère à nos coeurs et à tout ce qui compte réellement pour nous. Elle ne peut ni nous renseigner sur le rouge ni sur le bleu, ni sur l'amer ni sur le sucré, ni sur la douleur ni sur le plaisir. Elle ne connaît rien de la beauté ou de la laideur, du bien ou du mal, de Dieu ou de l'éternité.



Erwin
Schrödinger

- **Chat de Schrödinger** : un chat est enfermé dans une boîte avec une source radioactive. Il est dans un état de superposition "vivant" et "mort". Si on ouvre la boîte, on effectue une mesure et on trouve qu'il est soit "vivant" ou "mort" (probabilité $1/2$).



14.2 Chimie quantique

14.2.1 Atome d'hydrogène

14.2.2 Orbitales de l'atome d'hydrogène

14.2.3 Spin

- **Energie** : mécanique classique (2 corps : proton fixe)

$$E = \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{L}^2}{2m_e r^2} + V_C(\mathbf{r}) \quad \text{où} \quad V_C(\mathbf{r}) \equiv -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (14.13)$$

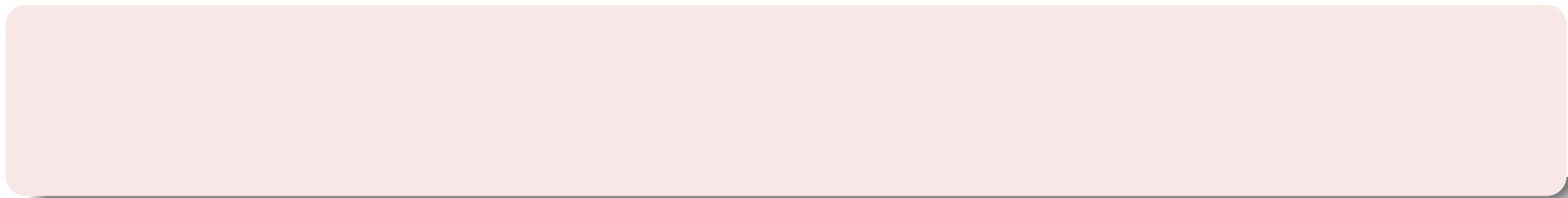
- **Hamiltonien** : mécanique quantique

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_r^2}{2m_e} + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2m_e r^2} + V_C(\hat{\mathbf{r}}) \quad \text{où} \quad V_C(\hat{\mathbf{r}}) \equiv -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbb{1}} \quad (14.14)$$

- **Equation aux valeurs propres** : symétrie sphérique $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$

$$\hat{H} \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) = E_n \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) \quad (14.15)$$

- **Equation de Schrödinger stationnaire** : (14.14) $\Rightarrow$ (14.15) = (14.16)



- 1 Fonctions propres ψ_{n,ℓ,m_ℓ} : vecteurs de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$
- 2 Valeurs propres $E_n < 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$: niveaux d'énergie

- **Equation de Schrödinger stationnaire :** (14.16)

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_r^2}{2m_e} + \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2m_e r^2} + V_C(\hat{\mathbf{r}}) \right) \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) = E_n \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi)$$

- **Opérateur moment cinétique :** où $\hat{\mathbf{r}} = r \hat{\mathbf{1}}$

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times (-i\hbar \nabla) = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \quad (14.17)$$

- **Equation aux valeurs propres :** moment cinétique

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) \quad (14.18)$$

- **Equation aux valeurs propres :** projection du moment cinétique

$$\hat{L}_z \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) = \hbar m_\ell \psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) \quad (14.19)$$

- **Fonction propre :** fonction radiale et fonction harmonique sphérique

$$\psi_{n,\ell,m_\ell}(r, \theta, \phi) = R_{n,\ell}(r) Y_{\ell,m_\ell}(\theta, \phi) \quad (14.20)$$

- **Equation aux valeurs propres** : fonction radiale (14.21)

$$\left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^2}_{=\frac{\hat{\mathbf{p}}_r^2}{2m_e}} + \underbrace{\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2}}_{=\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{2m_e r^2}} - \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{=V_C(\hat{\mathbf{r}})} \right) R_{n,\ell}(r) = E_n R_{n,\ell}(r)$$

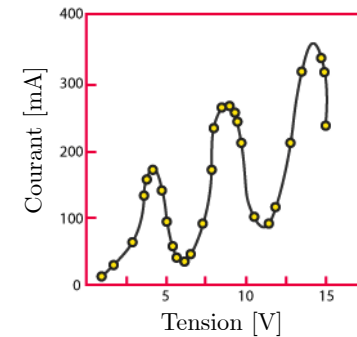
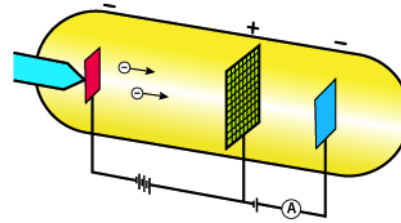
- **Equations aux valeurs propres** : fonction harmonique sphérique

$$\left(\underbrace{-\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\hbar^2}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}}_{=\hat{\mathbf{L}}^2} \right) Y_{\ell,m_\ell}(\theta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell,m_\ell}(\theta, \phi)$$

$$\underbrace{\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}}_{=\hat{L}_z} Y_{\ell,m_\ell}(\theta, \phi) = \hbar m_\ell Y_{\ell,m_\ell}(\theta, \phi) \quad (14.22)$$

- **Niveaux d'énergie** : où E_I est l'énergie d'ionisation d'un électron

$$(14.23)$$



- **Frank et Hertz** : des électrons sont arrachés d'une cathode par une tension V appliquée entre deux plaques dans une enceinte remplie de vapeur de mercure. Lorsque l'énergie eV des électrons correspond à la différence d'énergie entre deux niveaux d'énergie du mercure,

$$eV = \Delta E = E_{n+1} - E_n$$

ils cèdent leur énergie aux électrons du niveau inférieur E_n pour leur permettre d'effectuer une transition vers le niveau supérieur E_{n+1} . Ils sont alors arrêtés et n'atteignent pas l'anode : ils ne participent alors pas au courant I .

- **Observation** : les niveaux d'énergie E_n successifs sont mis en évidence par une chute importantes du courant I en fonction de la tension V .

- **Fonction propre** : fonction radiale et fonction harmonique sphérique

$$\psi_{n,\ell,m_\ell}(r,\theta,\phi) = R_{n,\ell}(r) Y_{\ell,m_\ell}(\theta,\phi) \quad (14.20)$$

- **Vecteur** : espace de Hilbert (notation de Dirac : appelé “ket”)

$$|n,\ell,m_\ell\rangle \equiv \psi_{n,\ell,m_\ell} \in \mathcal{H} \quad (14.24)$$

- **Nombres quantiques** :

- 1 Nombre quantique principal (niveaux d'énergie) : n

(14.25)

- 2 Nombre quantique azimutal (moment cinétique) : ℓ

(14.26)

- 3 Nombre quantique magnétique (projection du moment cinétique) : m_ℓ

(14.27)

$$|n, \ell, m_\ell\rangle \equiv \psi_{n,\ell,m_\ell} \in \mathcal{H}$$

$\ell = 0$
Etats s

$|1, 0, 0\rangle$

$|2, 0, 0\rangle$

$|3, 0, 0\rangle$

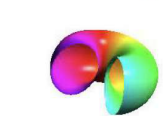
nombre azimutal

nombre
magnétique

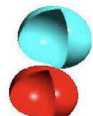
$|n, \ell, m_\ell\rangle$

nombre principal

$\ell = 1$
Etats p



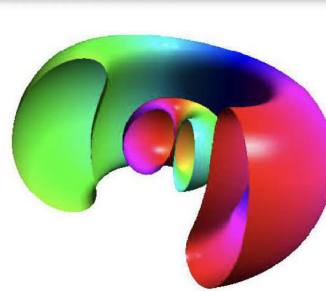
$|2, 1, -1\rangle$



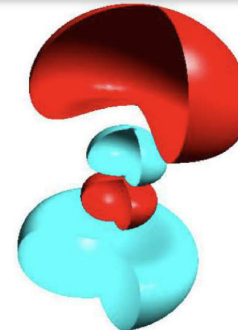
$|2, 1, 0\rangle$



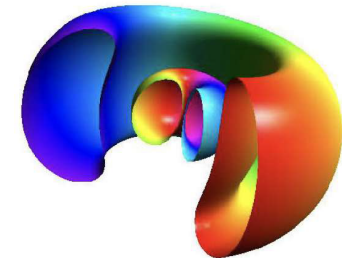
$|2, 1, 1\rangle$



$|3, 1, -1\rangle$

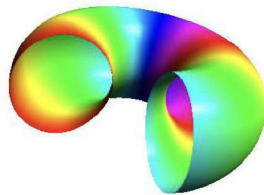


$|3, 1, 0\rangle$

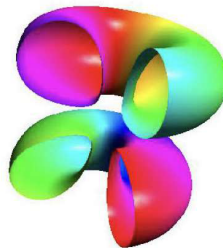


$|3, 1, 1\rangle$

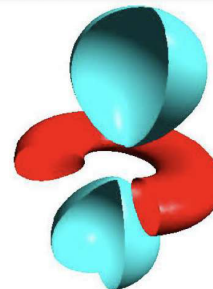
$\ell = 2$
Etats d



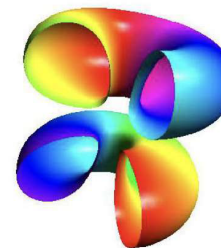
$|3, 2, -2\rangle$



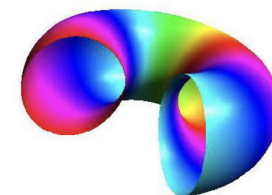
$|3, 2, -1\rangle$



$|3, 2, 0\rangle$



$|3, 2, 1\rangle$



$|3, 2, 2\rangle$

- **Spin** : moment cinétique intrinsèque $\hat{S}$ indépendant de l'état de rotation
 - Moment cinétique défini à une constante près : le spin !
 - Fonction propre : vecteur de l'espace de Hilbert $|s, m_s\rangle \equiv \psi_{s,m_s} \in \mathbb{C}^{2s+1}$

- **Equation aux valeurs propres** : spin

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle \quad (14.28)$$

- **Equation aux valeurs propres** : projection du spin

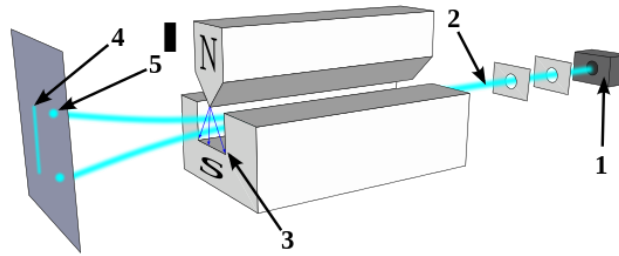
$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle \quad (14.29)$$

- **Spin** : électron, proton, neutron :

$$s = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -s \leq m_s \leq s \quad \Rightarrow \quad m_s \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \quad (14.30)$$

$$\textcircled{1} \text{ Spin up : } |\uparrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad \textcircled{2} \text{ Spin down : } |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

- **Orbitale** : deux états propres spin électron (spin up, spin down) (14.31)



- **Stern-Gerlach** : un faisceau d'atomes d'argent avec un spin $s = 1/2$ est envoyé dans l'entrefer de deux aimants où règne un champ magnétique inhomogène (Prix Nobel 1943). Le spin des atomes d'argent se trouve dans un état de superposition entre spin up et spin down,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)$$

- **Champ magnétique** : le champ magnétique vertical inhomogène B dévie les atomes de spin up $|\uparrow\rangle$ vers le haut et les atomes de spin down $|\downarrow\rangle$ vers le bas. On observe deux taches égales en haut et en bas.
- **Interprétation** : la mesure du spin des atomes d'argent avec le dispositif de Stern-Gerlach donne un spin up $|\uparrow\rangle$ avec une probabilité $1/2$ et un spin down $|\downarrow\rangle$ avec une probabilité $1/2$.
- **Processus de mesure** : le processus de mesure est probabiliste.

14.3 Information quantique

14.3.1 Processus de mesure

14.3.2 Qubit

14.3.3 Ordinateur quantique

14.3.4 Intrication quantique

- **Processus de mesure** : le processus de mesure est **probabiliste**.
- **Vecteur d'état de spin** : superposition des vecteurs propres $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$

$$(14.32)$$

- **Vecteur d'état propre de spin** : les vecteurs $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ sont orthonormaux (base de $\mathbb{C}^2$) : produits scalaires entre vecteurs

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle\uparrow|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0 \quad (14.33)$$

- **Processus de mesure du spin** : probabilité spin up

$$p_{\uparrow} = |\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \underbrace{\langle\uparrow|\uparrow\rangle}_{=1} \pm \underbrace{\langle\uparrow|\downarrow\rangle}_{=0} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (14.34)$$

- **Processus de mesure du spin** : probabilité spin down

$$p_{\downarrow} = |\langle\downarrow|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left| \underbrace{\langle\downarrow|\uparrow\rangle}_{=0} \pm \underbrace{\langle\downarrow|\downarrow\rangle}_{=1} \right|^2 = \frac{1}{2} \quad (14.35)$$

- **Interprétation** : en faisant une mesure du spin, on a une probabilité $1/2$ d'observer un spin up ou un spin down.

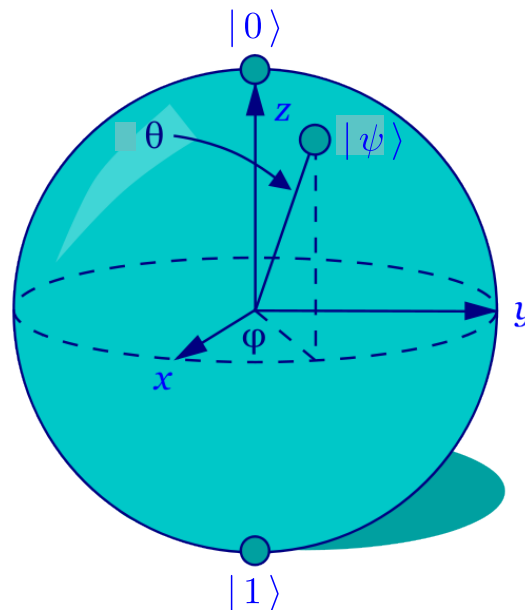
- **Bit** : “classical bit” : état propre

(14.36)

- **Qubit** : “quantum bit” : état de superposition

(14.37)

- **Sphère de Bloch** : les vecteurs d'état de superposition $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ se trouvent sur une sphère dont le plan horizontal est le plan complexe et dont l'axe vertical contient les états propres $|0\rangle$ et $|1\rangle$



- Ordinateur classique :

- 1 Base binaire (bit) : $|0\rangle$ ou $|1\rangle$
- 2 Octet : séquence unique 01110010
- 3 Cryptographie : la lecture ne modifie pas la séquence
- 4 Température : $\sim 273 - 300$ K (ambiante)

- Ordinateur quantique :

- 1 Base infinie (qubit) : $|\psi\rangle$ (sphère de Bloch)
- 2 Octet : séquence multiple $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\psi_5\psi_6\psi_7\psi_8$
- 3 Cryptographie : la lecture modifie la séquence
- 4 Température : ~ 0.01 K



- **Intrication quantique** : les états de deux qubits intriqués sont corrélés (non-séparables) quelle que soit la distance spatiale qui les sépare.

- ① **Etats non-intriqués de deux qubits** : séparables

(14.38)

$$|\psi\rangle_i = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle_i + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle_i \quad \text{où } i = 1, 2$$

- ② **Etats intriqués de deux qubits** : non-séparables - 4 états de Bell

(14.39)

- **Applications :**

- ① Téléportation quantique
 - ② Cryptographie quantique

- **Intrication quantique de photons** : photon 1 et photon 2

- ① Etats propres de polarisation : $|0\rangle$ ou $|1\rangle$

- ② Etats intriqués de Bell : **photons de même polarisation**

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2) \quad (14.40)$$

- **Processus de mesure des polarisations des photons** : probabilités

- ① **Photons de même polarisation** :

$$p_{\Phi^\pm}(0,0) = |(\langle 0|_1 \otimes \langle 0|_2) |\Phi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 0|0\rangle_1 \langle 0|0\rangle_2 \pm \langle 0|1\rangle_1 \langle 0|1\rangle_2|^2 = \frac{1}{2}$$

$$p_{\Phi^\pm}(1,1) = |(\langle 1|_1 \otimes \langle 1|_2) |\Phi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 1|0\rangle_1 \langle 1|0\rangle_2 \pm \langle 1|1\rangle_1 \langle 1|1\rangle_2|^2 = \frac{1}{2}$$

- ② **Photons de polarisation opposée** :

$$p_{\Phi^\pm}(0,1) = |(\langle 0|_1 \otimes \langle 1|_2) |\Phi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 0|0\rangle_1 \langle 1|0\rangle_2 \pm \langle 0|1\rangle_1 \langle 1|1\rangle_2|^2 = 0$$

$$p_{\Phi^\pm}(1,0) = |(\langle 1|_1 \otimes \langle 0|_2) |\Phi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 1|0\rangle_1 \langle 0|0\rangle_2 \pm \langle 1|1\rangle_1 \langle 0|1\rangle_2|^2 = 0$$

- **Paradoxe** : après avoir mesuré le photon intriqué 1 dans un état propre de polarisation à Bellevue, en mesurant le photon intriqué 2 à Bernex, on sait qu'il a la même polarisation à une vitesse au moins 10'000 fois supérieure à la vitesse de la lumière (Nicolas Gisin : UNIGE 1997).

- **Intrication quantique de photons** : photon 1 et photon 2

- ① Etats propres de polarisation : $|0\rangle$ ou $|1\rangle$

- ② Etats intriqués de Bell : **photons de polarisations opposées**

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) \quad (14.40)$$

- **Processus de mesure des polarisations des photons** : probabilités

- ① **Photons de même polarisation** :

$$p_{\Psi^\pm}(0,0) = |(\langle 0|_1 \otimes \langle 0|_2) |\Psi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 0|0\rangle_1 \langle 0|1\rangle_2 \pm \langle 0|1\rangle_1 \langle 0|0\rangle_2|^2 = 0$$

$$p_{\Psi^\pm}(1,1) = |(\langle 1|_1 \otimes \langle 1|_2) |\Psi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 1|0\rangle_1 \langle 1|1\rangle_2 \pm \langle 1|1\rangle_1 \langle 1|0\rangle_2|^2 = 0$$

- ② **Photons de polarisation opposée** :

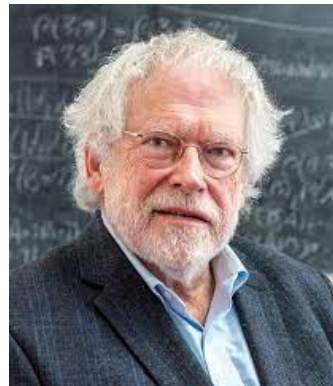
$$p_{\Psi^\pm}(0,1) = |(\langle 0|_1 \otimes \langle 1|_2) |\Psi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 0|0\rangle_1 \langle 1|1\rangle_2 \pm \langle 0|1\rangle_1 \langle 1|0\rangle_2|^2 = \frac{1}{2}$$

$$p_{\Psi^\pm}(1,0) = |(\langle 1|_1 \otimes \langle 0|_2) |\Psi^\pm\rangle|^2 = \frac{1}{2} |\langle 1|0\rangle_1 \langle 0|1\rangle_2 \pm \langle 1|1\rangle_1 \langle 0|0\rangle_2|^2 = \frac{1}{2}$$

- **Paradoxe** : après avoir mesuré le photon intriqué 1 dans un état propre de polarisation à Bellevue, en mesurant le photon intriqué 2 à Bernex, on sait qu'il a la polarisation opposée à une vitesse au moins 10'000 fois supérieure à la vitesse de la lumière (Nicolas Gisin : UNIGE 1997).

- **Intrication quantique : non-localité : prix Nobel de physique 2022**

- 1 Alain Aspect 
- 2 Anton Zeilinger 
- 3 John Clauser 



- **Information quantique : non-causalité : prix Marcel Benoist 2014**

- Nicolas Gisin

